CH7 DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

EX 27 :

1. $5^2=25\equiv -1(13)\Rightarrow 5^4\equiv(-1)^2(13)\Rightarrow 5^4\equiv 1(13)$ ⇒le reste modulo 13 de 5^4 est 1
2. • $5^{4k}=(5^4)^k\equiv 1^k(13)$ ⇒le reste modulo 13 de 5^{4k} est 1
   • $5^{4k+1}=(5^4)^k.5\equiv 1^k.5(13)$ ⇒le reste modulo 13 de 5^{4k+1} est 5
   • $5^{4k+2}=(5^4)^k.25\equiv 1^k.25(13)\Rightarrow 5^{4k+2}\equiv -1(13)$ le reste modulo 13 de 5^{4k+2} est 12
   • $5^{4k+3}=(5^{4k+2}).5\equiv(-1).5(13)\Rightarrow 5^{4k+3}\equiv -5(13)$ le reste modulo 13 de 5^{4k+3} est 8
3. $41\equiv 1(4)\Rightarrow 5^{202020202041}=5^{4k+1}$ donc le reste modulo 13 de $5^{202020202041}$ est 5
   $55\equiv 3(4)\Rightarrow 5^{555555555555}=5^{4k+3}$ donc le reste modulo 13 de $5^{555555555555}$ est 8
4. pour n=4k $5^{2n}+5^n\equiv 1+1(13)$
   Pour n=4k+1 $5^{2n}+5^n\equiv -1+5(13)$
   Pour n=4k+2 $5^{2n}+5^n\equiv 1+12(13)\Rightarrow 5^{2n}+5^n\equiv 0(13)$
   Pour n=4k+3 $5^{2n}+5^n\equiv -1+8(13)\Rightarrow 5^{2n}+5^n\equiv 7(13)$

Conclusion : l'ensemble des entiers n tels que $5^{2n}+5^n\equiv 0(13)$ est $\{4k+2 ; k\in \mathbb{N}\}$

EX 28 :

$-1=5x(-1)+4$ Donc le reste modulo 5 de (-1) est 4 $\Rightarrow 4\equiv -1(5)\Rightarrow 4^{2099}\equiv(-1)^{2099}(5)$

$-2=5x(-1)+3$ Donc le reste modulo 5 de (-2) est 3 $\Rightarrow 3\equiv -2(5)\Rightarrow 3^{2099}\equiv(-2)^{2099}(5)$

Alors $1^{2099}+2^{2099}+3^{2099}+4^{2099}\equiv 1^{2099}+2^{2099}+(-2)^{2099}+(-1)^{2099}(5)$

$\equiv 0(5)$

Donc $1^{2099}+2^{2099}+3^{2099}+4^{2099}$ est divisible par 5

EX 29 :

1. $999=27x37+0\Rightarrow 999\equiv 0(27)$
2. $999\equiv 0(27)\Rightarrow 1000\equiv 1(27)\Rightarrow 10^3\equiv 1(27)\Rightarrow (10^3)^n\equiv 1^n(27)\Rightarrow 10^{3n}\equiv 1(27)$
3. $10^{100}=10.10^{3x33}\equiv 10(27)$ et $100^{10}=10^{20}=100.10^{3x6}\equiv 100(27)$ Alors

$10^{100}+100^{10}\equiv 10+100(27)\Rightarrow 10^{100}+100^{10}\equiv 2(27)$

Conclusion : le reste modulo 27 de $10^{100}+100^{10}$ est 2

EX 30 : $2^4\equiv 1(5)$ (th de Fermat)

Si n est un multiple de $4\Rightarrow n=4k\Rightarrow 2^n=(2^4)^k\equiv 1^k(5)\Rightarrow 2^n\equiv 1(5)$

Si n n'est pas multiple de 4 $\Rightarrow \begin{cases} n=4k+1\Rightarrow 2^n=2^{4k+1}=2^{4k}\times 2\equiv 2(5) \\ n=4k+2\Rightarrow 2^n=2^{4k+2}=2^{4k}\times 4\equiv 4(5) \\ n=4k+3\Rightarrow 2^n=2^{4k+3}=2^{4k}\times 8\equiv 3(5) \end{cases}$ Alors 2^n n'est pas congru à 1 modulo 5

Conclusion : $2^n\equiv 1(5)$ ssi n est un multiple de 4

Un travail analogue permet de conclure que : $2^n\equiv 1(11)$ ssi n est un multiple de 10